DURÉE : 4 heures

Dans tout le problème, $1, 2, \ldots, p, \ldots, k$ est la suite des k premiers nombres entiers, avec $k \geqslant 2$; x est une variable réelle; Log est le symbole du logarithme népérien.

I

1° Étudier les variations de la fonction h définie, pour tout x réel, par :

$$h(x) = \sum_{p=1}^{p=k} p^x .$$

Préciser sa concavité et tracer sa courbe représentative.

2° Étudier les variations de la fonction H définie, pour tout x réel, par :

$$\mathrm{H}(x) = \mathrm{Log}\, h(x) .$$

Préciser sa concavité et tracer sa courbe représentative.

3° Soit φ une fonction numérique définie et deux fois dérivable, sur un intervalle ouvert $]c, d[$ contenant un intervalle fermé $[a, b]$, et soit $x_0 \in [a, b]$. On définit une fonction μ sur $[a, b]$ par :

$$\begin{cases} \mu(x) = \dfrac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} & \text{si} \quad x \neq x_0 \\ \mu(x_0) = \varphi'(x_0) . \end{cases}$$

Montrer que si, pour tout $x \in]a, b[$, on a $\varphi''(x) > 0$, alors μ est strictement croissante sur $[a, b]$.

4° Soient l_1 et l_2 les fonctions définies, pour tout $x \neq 0$, par :

$$l_1(x) = \frac{h(x) - k}{x} \quad , \quad l_2(x) = \frac{\mathrm{H}(x) - \mathrm{Log}\, k}{x} ,$$

et l_3 la fonction définie pour tout $x \neq 1$ par :

$$l_3(x) = \frac{h(x) - \frac{k(k+1)}{2}}{x-1}.$$

Établir les tableaux de variations de ces fonctions. Peut-on les prolonger par continuité aux points où elles ne sont pas définies?

II

1° Déterminer les limites de $[h(x)]^{\frac{1}{x}}$ quand x tend successivement vers $+\infty$, vers $-\infty$, vers 0 par valeurs positives, vers 0 par valeurs négatives.

2° Soit f la fonction définie par :

$$\left| \begin{array}{l} f(x) = [h(x)]^{\frac{1}{x}} \quad \text{si} \quad x \neq 0 \\ f(0) = \lim\limits_{x \to 0} [h(x)]^{\frac{1}{x}}. \end{array} \right.$$

Établir le tableau de variation et tracer la courbe représentative, en précisant l'allure de la courbe au voisinage du point $x = 0$.

3° Étudier la nature des séries de termes généraux :

$$u_n = f(n) - k, \quad v_n = f\left(-\frac{1}{n}\right), \quad w_n = 1 - f(-n).$$

Les intégrales $\int_1^X (f(t) - k)\,dt$, $\int_{-X}^0 (1 - f(t))\,dt$, ont-elles des limites finies quand $X \longrightarrow +\infty$?

III

1° Déterminer les limites de $\left[\frac{h(x+1)}{h(1)}\right]^{\frac{1}{x}}$ quand x tend successivement vers $+\infty$, vers $-\infty$, vers 0.

2° Soit g la fonction définie par

$$\left| \begin{array}{l} g(x) = \left[\frac{h(x+1)}{h(1)}\right]^{\frac{1}{x}} \quad \text{si} \quad x \neq 0 \\ g(0) = \lim\limits_{x \to 0} \left[\frac{h(x+1)}{h(1)}\right]^{\frac{1}{x}}. \end{array} \right.$$

Établir le tableau de variation et tracer la courbe représentative.

3° Montrer que :

$$\left(\frac{\sum_{p=1}^{p=k} p}{\sum_{p=1}^{p=k} \frac{1}{p}} \right)^{\frac{1}{2}} < \frac{k+1}{2} < (1^1 \times 2^2 \times \ldots \times k^k)^{\frac{2}{k(k+1)}} < \frac{\sum_{p=1}^{p=k} p^2}{\sum_{p=1}^{p=k} p}$$

Pouvait-on déduire ces inégalités des résultats établis dans la partie I?

4° Étudier la nature des séries de termes généraux :

$$r_n = k - g(n), \quad t_n = g(-n) - 1,$$

ainsi que la nature des intégrales généralisées :

$$\int_0^{+\infty} (k - g(t))\,dt, \quad \int_{-\infty}^0 (g(t) - 1)\,dt.$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail